Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen, cursus 2005-2006

Datum	:	21-04-2006
Plaats	:	Examenhal
Tijd	:	09.00-12.00

Het tentamen is open boek; u mag al uw boeken, aantekeningen, etc. gebruiken.

U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt. Blijf niet eindeloos aan een onderdeel werken. Indien u een onderdeel niet kunt, ga dan gewoon verder en gebruik het resultaat (indien mogelijk).

1. Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= 2xy \\ \tfrac{dy}{dt} &= 1-x \end{aligned}$$

(a) Bewijs dat er precies één stationaire oplossing is en bepaal deze.

(b) Bewijs dat er een oplossing is waarvan alleen x constant is en bepaal deze.

(c) Geef een differentiaalvergelijking voor y als functie van x en los deze op. (Alleen ter controle: $y^2 = \ln|x| - x - C$.)

d) Bepaal de nul-isoclienen van het stelsel differentiaalvergelijkingen. Schets vervolgens het faseplaatje (geef een aantal banen met doorlooprichting voor toenemende t, bepaal het gebied waar binnen periodieke banen liggen, etc.).

2. (a) Bepaal alle oplossingen van

$$\frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Bepaal alle oplossingen van

$$\frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} y$$

(c) Bepaal alle oplossingen van

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = ce^x$$

voor $c = 0$ en voor $c = 1$.

3. (a) Beschouw een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen $\frac{dy}{dx} = Ay, y \in \mathbb{R}^n$.
Een lineaire constante van beweging is een lineaire functie $z = cy$, met c een n-dimensionale rijvector, zodanig dat $\frac{dz}{dx} = 0$. Geef een noodzakelijk en voldoende voorwaarde op de matrix A en de rijvector c opdat $z = cy$ een constante van beweging is.
Wat impliceert het bestaan van een lineaire constante van beweging voor de eigenwaarden van A ?

Z.0.2

(b) Beschouw een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen $\frac{dy}{dx} = A(x)y$. Zij $\Phi_1(x)$ en $\Phi_2(x)$ twee fundamentele matrices van ditzelfde stelsel. Definieer $C = (\Phi_1(0))^{-1}\Phi_2(0)$. Toon aan dat $\Phi_1(x)C = \Phi_2(x)$.

(c) Laat A een $n \times n$ matrix en b een n-dimensionale kolomvector. Laat zien dat het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dy}{dx} = Ay + e^{\mu x}b$$

een oplossing van de vorm $e^{\mu x}a$, met a een n-dimensionale kolomvector, heeft indien μ *geen* eigenwaarde van A is.

(d) Beschouw een 2-dimensionaal stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen $\frac{dy}{dx} = Ay, y \in \mathbb{R}^2$.

Geef een noodzakelijke en voldoende voorwaarde op de eigenwaarden van de constante matrix A opdat alle oplossingen $y(x)$ begrensd zijn voor $x \to \infty$.

Geef een noodzakelijke en voldoende voorwaarde op de eigenwaarden van de constante matrix A opdat alle oplossingen $y(x)$ begrensd zijn zowel voor $x \to \infty$ als voor $x \to -\infty$.

4. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1$$

Bepaal de eerste drie termen van de Taylorreeks van de oplossing $y(x)$ om $x = 0$ door

(a) Picard-iteratie startend van de constante functie $y = 1$.

(b) expliciet oplossen van de differentiaalvergelijking.

5. Beschouw het randwaarde probleem

$$y'' + 2y' + \lambda y = f(x), \quad y(-\frac{1}{2}\pi) = 0, \quad y(\frac{1}{2}\pi) = 0$$

(a) Zij $f(x) = 0$ en $\lambda = 2$. Bepaal een oplossing die niet identiek nul is.

(b) Zij $\lambda = 0$. Bepaal een oplossing van het inhomogene probleem ($f(x) \neq 0$) met behulp van Greense functies. Is deze oplossing uniek ?

Puntenverdeling:

1. a: 5, b: 3, c: 5, d: 7.
2. a: 6, b: 7, c: 7.
3. a: 5, b: 5, c: 5, d: 5.
4. a: 8, b: 7.
5. a: 7, b: 8.

Gratis: 10